

Kółko z Menelausa, Cevy

1. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty A', B', C' są odbiciami A, B, C odpowiednio względem C, A, B . Proste $A'B, B'C$ oraz $C'A$ oznaczmy odpowiednio k, l, m . Ich przecięcia oznaczmy: k z l jako Y , k z m jako X oraz l z m jako Z . Pokazać, że zachodzi:

$$[AB'Z] + [BC'X] + [CA'Y] = [ABC]$$

2. Dla trójkąta XYZ na płaszczyźnie definiujemy operację M jako obranie punktów X', Y', Z' na bokach YZ, XZ, XY odpowiednio, tak by zachodziło:

$$\frac{XZ'}{Z'Y} = \frac{YX'}{X'Z} = \frac{ZY'}{Y'X} = \frac{2}{3}$$

Przy czym proste XX', YY', ZZ' odcinają trójkąt KLM będący wynikiem operacji M .

a) Pokazać, że z odcinków XX', YY', ZZ' da się zbudować trójkąt.

b) Pokazać, że trójkąt z punktu a) jest podobny do trójkąta KLM . Znaleźć skalę podobieństwa.

c) Operację R odpalamy dla trójkąta ABC uzyskując mały trójkącik $A'B'C'$, następnie dla tego trójkącika uzyskując $A''B''C''$ itd. postępujemy w nieskończoność. Znaleźć iloczyn (przecięcie) wszystkich otrzymanych trójkątów.

3. W trójkącie ABC obrano tak punkty A', B', C' na bokach BC, AC, AB odpowiednio, by proste AA', BB', CC' przecinały się w jednym punkcie. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia:

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{BA'}{A'C} + \frac{CB'}{B'C}$$

4. W trapezie $ABCD$, w którym $BC > AD$, na dłuższej podstawie AB obrano taki punkt K by $KB = CD$. Następnie przeprowadzono przez punkt B taką prostą, by przecinała ona odcinki AD i KD w punktach odpowiednio E i F oraz by $AE = KF$. Na boku BC oznaczono taki punkt S , że $BS = AD$. Pokazać, że wówczas $EC \parallel FS$.

5. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}$$

6. Fredek, Paździoch, Walduś i Boczek poruszają się każdy po swojej prostej ze stałymi prędkościami. W każdej sytuacji, gdy dwóch z nich się spotyka, wypijają 2 napoje MF w króciutkim czasie i jadą dalej. Wykazać, że niemożliwa jest sytuacja, w której zostaje skonsumowanych dokładnie 10 napojów MF.