

Kółko z Dirichleta

1. W trójkącie równobocznym o boku 12 dane jest 300 punktów. Pokazać, że pewne trzy z nich tworzą trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie co najwyżej 3.

2. W kwadracie o boku 4 danych jest 17 punktów. Pokazać, że istnieją wśród nich dwa odległe o co najwyżej $\sqrt{2}$.

3. Dane są ciągi liczb (x_1, x_2, \dots, x_7) oraz (y_1, y_2, \dots, y_7) , takie że dla każdego i zachodzi:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \\ x_i + y_i \leq 1 \end{cases}$$

Pokazać, że istnieją indeksy k, l że zachodzi $|x_k - x_l| + |y_k - y_l| \leq \frac{1}{2}$.

4. Dany jest pięciokąt $ABCDE$, którego wierzchołki umieszczone są w punktach kratowych. Pokazać, że we wnętrzu lub na boku pięciokąta istnieje jeszcze co najmniej jeden różny od wierzchołków punkt kratowy.

5. Pani Macias (zwana w niektórych kręgach Fredkiem), jak zawsze przed lekcją polskiego, pragnie uszczęśliwić świat. Świat zaś jest sferą o promieniu 1, a pani Macias uszczęśliwia go poprzez swe czarujące spojrzenie z dowolnego punktu przestrzeni poza kulą (widzi tylko tę część sfery, która nie jest zasłaniana przez inną część sfery). Ile razy, co najmniej, pani Macias musi spojrzeć, aby uszczęśliwić wszystkich swych potencjalnych uczniów?

6. Ze zbioru liczb od 1 do 100 wybrano 26 liczb. Pokazać, że spośród tych 26 da się wybrać niepusty podzbiór o iloczynie będącym kwadratem liczby całkowitej.

7. W Księstwie Hofmańskim jest 6 pomników Gozera Wielkiego. Pomiedzy każdymi dwoma istnieje bezpośrednie połączenie obsługiwane przez dokładnie jednego z dwóch przewoźników. Pokazać, że istnieją 3 pomniki, pomiedzy którymi połączenia obsługuje ten sam przewoźnik.

8. Dzięki UE Księstwo Hofmańskie dostało dotacje i zwiększyło liczbę pomników do 66 zaś liczbę przewoźników do 4. Pokazać, że również w tym przypadku teza zadania 7 jest spełniona.