

Twierdzenia z wielomianów

TW. BEZOUT Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, takie, że $\deg(P) \geq \deg(Q)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para wielomianów $W(x)$, $V(x)$, że dla każdego x zachodzi:

$$P(x) = W(x) \cdot Q(x) + V(x)$$

oraz $\deg(V) < \deg(Q)$.

DODATEK.1. Jeśli wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ miały współczynniki całkowite, to wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ również będą miały współczynniki całkowite.

DODATEK.2. W szczególności jeśli $P(x)$ ma współczynniki całkowite zaś $Q(x) = x - a$ to zachodzi:

$$P(x) = (x - a)W(x) + P(a)$$

Zaś $W(x)$ i $P(a)$ to jedyna taka możliwa para.

WZORY VIETE'ŃA Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych p_1, p_2, \dots, p_n to zachodzi:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{a_n} \\ a_{n-2} &= \frac{p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n}{a_n} \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n \cdot \frac{p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{a_n} \end{aligned}$$

FAKCIK O PODZIELNOŚCI Dany jest wielomian $W(x)$ mający współczynniki całkowite. Wówczas dla każdego k naturalnego zachodzi:

$$n \equiv m \Rightarrow W(n) \equiv W(m)$$

Rozpatrując to w podzielności przez k .