

## Kółko wakacyjne

1. Pokazać, że dla każdej liczby pierwszej  $p$  zachodzi:

$$p \mid (p-1)! + 1$$

2. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $D$ . Prosta  $k$  jest styczna do okręgów  $o_1$  i  $o_2$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ . Odcinek  $AC$  jest średnicą okręgu  $o_1$ . Prosta  $l$  przechodzi przez punkt  $C$  i jest styczna do okręgu  $o_2$  w punkcie  $E$ . Wykazać, że  $AC = CE$ .

3. Pewna nauczycielka zrobiła klasie 1A test, w którym można było dostać  $n$  punktów. Jeden punkt otrzymała połowa klasy i jeszcze jedna osoba, dwa punkty połowa reszty i jeszcze dwie osoby itd. aż wreszcie  $n$  punktów połowa reszty i jeszcze  $n$  osób. Jeśli nikt nie dostał zera punktów, to ile osób jest w klasie 1A?

4. Pokazać, że jeśli  $a, b, c$  są bokami trójkąta, to zachodzi:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

5. Na ile sposobów da się prostokąt  $2$  na  $n$  pokryć prostokątami  $2$  na  $1$ ?

6. W trójkącie  $ABC$  umieszczono trzy okręgi o równych promieniach, takie, że każdy z nich jest styczny do innej pary boków trójkąta oraz wszystkie przechodzą przez pewien punkt  $D$ . Pokazać, że  $D$ , środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego na trójkącie leżą na jednej prostej.