

## Kółko z okręgu Apoloniusza i innych rzeczy

1. Na okręgu o środku w  $O$  i promieniu  $R$  obrano punkty  $A$  i  $D$ . Na półprostej  $OD$  obrano punkty  $B, C$ , takie, że  $OB \cdot OC = R^2$ . Pokazać, że prosta  $AD$  jest dwusieczną kąta  $BAC$ .

2. W trójkącie  $ABC$  niech  $D$  będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta  $C$  z bokiem  $AB$ . Przez  $P$  oznaczmy pole trójkąta  $ABC$ . Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$2P\left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) \leq AB$$

3. Wewnątrz trójkąta  $ABC$  dany jest punkt  $P$ , taki, że  $\angle APB = \angle ACB + 90^\circ$ . Pokazać, że styczne do okręgów opisanych na trójkątach  $CPA$  i  $CPB$  poprowadzone w punkcie  $C$  są prostopadłe.

4. Wewnątrz trójkąta  $ABC$  dany jest punkt  $P$ , taki, że  $\angle APB = \angle ACB + 90^\circ$ . Ponadto  $AC \cdot BP = BC \cdot AP$ . Obliczyć  $\frac{PC \cdot AB}{AC \cdot BP}$ .

5. Skonstruować trójkąt  $ABC$  mając dane boki  $AB$  i  $AC$  oraz kąt  $\angle AMB$  gdzie  $M$  jest środkiem boku  $BC$ .

6. Trójkąt ma boki  $a, b, c$  oraz pole  $S$ . Pokazać, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$